Analisi matematica II

Definizioni e proprietà

1a Dominio piano normale rispetto all'asse x: insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ tale che $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ \alpha, \beta \in C^0([a,b]),\ \alpha(x) \le \beta(x)\ \forall x \in [a,b]\}$. Area $D = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\, dx$.

1b Dominio piano normale rispetto all'asse y: insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y),\ \gamma, \delta \in C^0([c,d]),\ \gamma(y) \le \delta(y)\ \forall y \in [c,d]\}$. Area $A = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y))\, dy$.

2 Partizione di D: dato $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio normale, è l'insieme $P = \{D_1, D_2, \ldots D_m\}$ finito di domini normali privi di punti interni in comune tali che $\bigcup_{i=1} D_i = D$.

3a Somma inferiore: sia $f \in C^0(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio normale e sia $P = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ partizione di D;

$$s(P) = \sum_{i=1}^{m} mis(D_i) \cdot \min f(x,y) \quad (x,y) \in D_i$$

è la somma inferiore.

3b Somma superiore: con le stesse condizioni della somma inferiore:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{m} mis(D_i) \cdot \max f(x,y) \quad (x,y) \in D_i$$

è la somma superiore.

3c Integrale doppio: $\forall P_1, P_2$ partizioni di D dominio normale, $D \subset \mathbb{R}^2$ si ha $s(P_1) \le S(P_2)$. s e S sono due classi di grandezze contigue. Quindi ammettono un elemento separatore, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.:

$$s(P_1) \le c \le S(P_2) \quad \text{al variare di } P_1 \text{ e } P_2$$

c si definisce integrale doppio di f in D e si scrive:

$$c = \iint_D f(x,y)\ dx\ dy$$

3d Insiemi contigui: siano A e B insiemi separati di $\mathbb{R}$, cioè t.c. $\forall a \in A, \forall b \in B$ si ha $a \le b$. Essi sono contigui, cioè ammettono un unico elemento separatore, se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \bar{a} \in A$ e $\bar{b} \in B$ t.c. $0 \le \bar{b} - \bar{a} < \varepsilon$

3e Proprietà integrali doppi: siano $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio normale, $f, g \in C^0(D)$, $c \in \mathbb{R}$:

- linearità rispetto alla somma di funzioni:

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\ dx\ dy = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

- prodotto per costante:

$$\iint_D c\, f(x,y)\, dx\, dy = c \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

- linearità rispetto all'unione dei domini normali: siano D_1 e D_2 tali che $D = D_1 \cup D_2$ e $D_1 \cap D_2$ ha area nulla, D_1 e D_2 domini normali. Allora (anche per un generico numero finito n di domini normali):

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

- positività funzione e integrale: sia $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in D$:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \geq 0$$

- disuguaglianze funzioni e integrali: se $f(x,y) \geq g(x,y) \ \forall (x,y) \in D$:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \geq \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$$

- un'utile maggiorazione: se $|f(x,y)| \leq M$ in D:

$$\left|\iint_D f(x,y)\, dx\, dy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy \leq \iint_D M\, dx\, dy = M \iint_D dx\, dy = M \,\text{area}\, D$$

Quindi per calcolare un'area "complessa" si deve usare l'integrale doppio.

- nullità dell'integrale doppio: se $\text{mis}\, D = 0$ oppure $f(x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in D$:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = 0$$

4 Coordinate del baricentro di un dominio $T \subset \mathbb{R}^2$ normale:

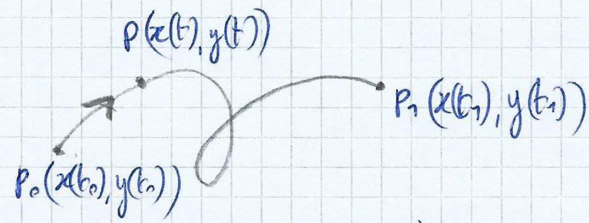
- se T è omogeneo:

$$x_G = \frac{\iint_T x\, dx\, dy}{\iint_T dx\, dy} \qquad y_G = \frac{\iint_T y\, dx\, dy}{\iint_T dx\, dy}$$

- se la funzione $\delta = \delta(x,y)$ dà l'espressione della densità di massa di T:

$$x_G = \frac{\iint_D x\, \delta(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \delta(x,y)\, dx\, dy} \qquad y_G = \frac{\iint_D y\, \delta(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \delta(x,y)\, dx\, dy}$$

5 Velocità e accelerazione:



Sia $\varphi = (x(t), y(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ la legge oraria del moto, cioè $\varphi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$

Se $x, y \in C^1([t_0, t_1]) \Rightarrow \varphi'(t) = (x'(t), y'(t))$ è la velocità all'istante $t \in [t_0, t_1]$. Si ha che:

$|\varphi'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ è la velocità scalare

Se $x, y \in C^2([t_0, t_1]) \Rightarrow \varphi''(t) = (x''(t), y''(t))$ è l'accelerazione

6a Curva piana in $\mathbb{R}^2$: applicazione $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ di componenti $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

6b Traccia o sostegno della curva: immagine $\varphi([a, b])$ della curva piana di equazioni parametriche:

$$\varphi : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

6c Curva semplice: curva $\varphi[a, b] \to \mathbb{R}^2$ t.c. presi due punti $t_0, t_1 \in [a, b]$ di cui almeno uno interno ad $[a, b]$ si abbia $\varphi(t_0) \neq \varphi(t_1)$ con $t_0 \neq t_1$

6d Curva chiusa: sia $\varphi[a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva, essa è chiusa se si ha $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow (x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$

6e Curva regolare: sia $\varphi[a, b] \to \mathbb{R}^2$, φ si dice regolare se data la rappresentazione parametrica si ha:

- $x, y \in C^1([a, b])$;
- $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0 \quad \forall t \in]a, b[$

6f Curva regolare a tratti: una curva $\varphi[a, b] \to \mathbb{R}^2$ è regolare a tratti se considerata la partizione $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ e $\varphi_{|[a_{i-1}, a_i]} = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$ le curve φ_i risultano regolari. La partizione deve essere finita

7a Vettore e versore tangenti: il vettore tangente alla curva regolare $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ è $(x'(t), y'(t))$

Il versore tangente è il vettore tangente di modulo unitario:

$$\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right)$$

7b Convenzione per le percorrenze: la coppia (N, T), dove N è il vettore normale, è congruente a (e_1, e_2) con e_1 versore dell'asse x e e_2 versore dell'asse y $\Rightarrow$ il verso di N si ottiene per rotazione di T di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario.

7c Versore normale: il versore normale alla curva regolare φ in t_0 è:

$$\underline{n} = \left(\frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, \frac{-x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

8a Lunghezza di una curva: data $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva regolare, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, la sua lunghezza è il numero:

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Se φ è regolare a tratti:

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} L(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

8b Curve orientate: se $\varphi [a,b] \to \mathbb{R}^2$, regolare, P_1 precede P_2 sul sostegno di φ se $t_1 < t_2$, ove $P_1 = \varphi(t_1)$ e $P_2 = \varphi(t_2)$, con $t_1, t_2 \in [a,b]$

8c Curve equivalenti: date $\varphi [a,b] \to \mathbb{R}^2$, φ regolare e $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^2$, regolare, esse sono equivalenti se esiste un'applicazione $g : [a,b] \to [c,d]$, $g \in C^1$ e tale che $g'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$ e per cui $\varphi(t) = \psi(g(t)) \ \forall t \in [a,b]$:

$$[a,b] \xrightarrow{g} [c,d] \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(t) = \psi(g(t))$$

Ne segue che g è invertibile $\Rightarrow \exists g^{-1} : [c,d] \to [a,b]$, $g^{-1} \in C^1$; $(g^{-1})'(s) \neq 0 \ \forall s \in [c,d]$ e $\psi(s) = \varphi(g^{-1}(s)) \ \forall s \in [c,d]$

g è cambiamento ammissibile di parametro. Se $g'(t) > 0$ il verso di percorrenza delle due curve equivalenti è lo stesso, se $g'(t) < 0$ è opposto.

8d Integrale curvilineo per la funzione generica: sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regolare, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, sia $\Gamma = \varphi([a,b])$ e $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $\Gamma \subset A$, f continua su Γ (Γ sostegno):

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

In cui $\int_\gamma f\, ds$ è l'integrale curvilineo della funzione, per cui valgono le consuete proprietà degli integrali.

9a Curva in $\mathbb{R}^3$: applicazione $\varphi[a,b] \to \mathbb{R}^3$ con rappresentazione parametrica $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$. φ è regolare se $x, y, z \in C^1([a,b])$ e se $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0$ $\forall t \in]a,b[$. Esistono pure le definizioni di regolari a tratti, chiuse, ecc.

9b Campo vettoriale piano: applicazione $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con D aperto tale che:

$$F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = f_1(x,y)\underline{i} + f_2(x,y)\underline{j}$$

Con $f_i: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $i = 1,2$ (funzioni scalari); se f_i, $i = 1,2$ sono funzioni continue $\Rightarrow$ F è continuo.

9c Integrali dei campi vettoriali o di seconda specie: sia $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, D aperto e sia γ una curva regolare con parametrizzazione $\varphi(x(t), y(t))$ il cui sostegno è contenuto in D. Allora se su γ è fissato un verso di percorrenza coincidente con l'orientamento dato da φ si ha:

$$\int_\gamma F = \int_a^b [f_1(x(t), y(t))\, x'(t) + f_2(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt$$

Se l'orientamento dato da φ è opposto al verso di percorrenza assegnato da γ si ha:

$$\int_\gamma F = -\int_{-\gamma} F$$

9d Gradiente: data $f \in C^1(D)$, D aperto $\Rightarrow \nabla f$ è un campo vettoriale con direzione $\perp$ alle curve di livello e verso rivolto alla crescenza delle quote delle curve di livello.

9e Conservatività del campo vettoriale F: dato $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale piano, D aperto, $F \in C^0(D)$, F è conservativo in D se $\exists\, u: D \to \mathbb{R}$: $u \in C^1(D)$ t.c. $\nabla u = F$ in D. u è chiamato potenziale di F.

9f Rotore di F: sia $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, A aperto, $F \in C^1(A)$; si definisce rotore di F:

$$\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

f_1, f_2, f_3 sono $f_k(x,y,z)$ $k = 1,2,3$

Sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\text{rot}\, F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\underline{k}$$

Nel piano $F=(f_1, f_2)$, pensato in $\mathbb{R}^3$: $F=(f_1, f_2, 0) \Rightarrow \text{rot} F = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\underline{k}$.
$\Rightarrow$ rot $F \perp$ piano xy.

9g Divergenza: sia F campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ con dominio D, D aperto, $F \in C^1(D) \Rightarrow \text{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$, dove $F=(f_1, f_2, f_3)$.
div F è uno scalare.

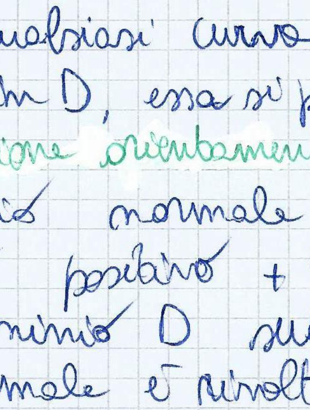
9h Insieme connesso in $\mathbb{R}^n$: un insieme $D \subset \mathbb{R}^n$ è connesso se, considerati due punti P_0 e $P_1 \in D$, $P_0 \neq P_1$, $\exists$ una poligonale (unione di segmenti) che congiunge P_0 a P_1 ed è tutta contenuta in D.
I punti sono qualsiasi!

9i Insieme semplicemente connesso in $\mathbb{R}^2$: un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se considerata una qualsiasi curva regolare a tratti semplice chiusa con sostegno interamente contenuto in D racchiude esclusivamente punti di D. D non ha né tagli né buchi limitati.

9l Insieme semplicemente connesso in $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^n$): sia $D \subset \mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^n$), diciamo che D è semplicemente connesso se considerata una qualsiasi curva regolare a tratti, semplice chiusa con sostegno in D, essa si può restringere a un punto di D.

10 Convenzione orientamento frontiere: si dice che la frontiera ∂D, D dominio normale regolare rispetto all'asse x ha orientamento positivo $+\partial D$ se percorrendo la frontiera si lascia il dominio D sulla sinistra. Più rigorosamente, il versore normale è rivolto verso l'esterno di D.

11a Integrale triplo: sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un dominio normale rispetto al piano xy, cioè $E=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D$, D dominio normale, $\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)$, $\alpha, \beta \in C^0(D)$, $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)$ $\forall (x,y) \in D\}$.
Si definisce misura di E:



$$\text{mis } E = \iint_D \{\beta(x,y) - \alpha(x,y)\}\, dx\, dy =$$
$$= \iiint_E 1\, dx\, dy\, dz = \text{vol } E$$

Sfruttando la definizione di Riemann, se E è dominio normale in $\mathbb{R}^3$, si consideri una partizione finita di E, $P=\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ ottenuta intersecando E con piani paralleli ai piani coordinati, abbiamo due somme. Consideriamo pure $f: E \to \mathbb{R}$ continua.

La somma inferiore:

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} mis(E_i) \cdot \min f(E_i)$$

E la somma superiore:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} mis(E_i) \cdot \max f(E_i)$$

Minimo e massimo esistono perché f è definita in un intervallo chiuso e limitato. Si dimostra che tali somme verificano $s(P_1) \le S(P_2)$ al variare di P_1 e P_2 partizioni di E. I due insiemi sono separati e contigui. Quindi $\exists!$ $c \in \mathbb{R}$, detto elemento separatore, t.c.:

$$s(P_1) \le c \le S(P_2)$$

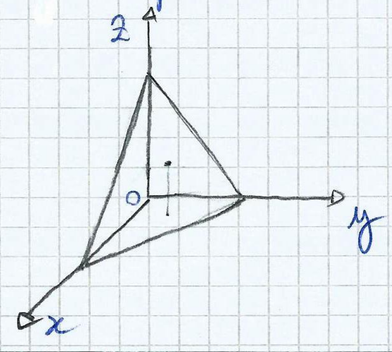
Tale c è l'integrale triplo:

$$c = \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

11b Proprietà degli integrali tripli: siano $E \subset \mathbb{R}^3$ domini normali, $f,g \in C^0(E)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

- nullità dell'integrale triplo: se $vol\,E = mis\,E = 0$ o $f(x,y,z) = 0$ $\forall (x,y,z) \in E$
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$$
- linearità:
$$\iiint_E \{c_1 f(x,y,z) + c_2 g(x,y,z)\}\,dx\,dy\,dz =$$
$$= c_1 \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + c_2 \iiint_E g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
- linearità rispetto all'unione di domini normali: se $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$ che non si sovrappongano ($vol(E_i \cap E_j) = 0$ se $i \neq j$):
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{k} \iiint_{E_i} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

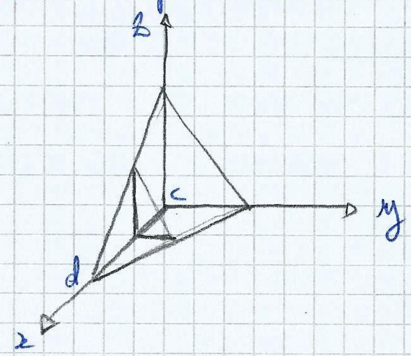
11c Formule di riduzione degli integrali tripli: sia E dominio normale rispetto al piano xy, cioè $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y),\ \alpha, \beta \in C^0(D),\ \alpha(x,y) \le \beta(x,y)\ \forall (x,y) \in D,\ D$ dominio piano normale$\}$. Esistono due possibili modi di riduzione dell'integrale triplo. Nelle ipotesi fatte vale la riduzione "per fili":



$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint_D dx\,dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

con $f \in C^0(E)$

Se invece E è un dominio normale rispetto all'asse x, cioè $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \le x \le d, (y,z) \in S_x\}$, in cui S_x sono le sezioni ottenute intersecando E con piani perpendicolari all'asse x, per $x \in [c,d]$, si usa la riduzione "per sezioni":



$$\iiint_E f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \int_c^d dx \iint_{S_x} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

con $f \in C^0(E)$

12 Coordinate del baricentro in $\mathbb{R}^3$: le coordinate del baricentro di un dominio $E \subset \mathbb{R}^3$, nel caso di solido omogeneo, sono:

$$x_G = \frac{\iiint_E x\, dx\, dy\, dz}{\text{vol}\, E} \qquad y_G = \frac{\iiint_E y\, dx\, dy\, dz}{\text{vol}\, E} \qquad z_G = \frac{\iiint_E z\, dx\, dy\, dz}{\text{vol}\, E}$$

Se la funzione $\delta = \delta(x,y,z)$ è l'espressione della densità di massa di E:

$$x_G = \frac{\iiint_E x\delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\text{vol}\, E} \quad y_G = \frac{\iiint_E y\,\delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\text{vol}\, E} \quad z_G = \frac{\iiint_E z\,\delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\text{vol}\, E}$$

13 Regolarità di $E \subset \mathbb{R}^3$: sia $E \subset \mathbb{R}^3$ dominio normale. Si dice che E è un dominio regolare se le funzioni che lo delimitano sono di classe C^1.

14a Superficie in $\mathbb{R}^3$: sia D un dominio connesso nel piano. Si definisce superficie regolare (parametrizzata) l'applicazione $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi \in C^1(D)$ tale che:

$$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\ \varphi_3(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

Con $\varphi_i: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$. Dicendo che D è dominio connesso intendiamo l'unione di un aperto connesso con la sua frontiera (chiusura di un aperto connesso). Per φ devono valere:

- per ogni coppia di punti $(u',v') \neq (u'',v'') \in \text{int}\, D$ non è possibile che $\varphi(u',v') = \varphi(u'',v'')$ (cioè φ è iniettiva, cioè invertibile in D);
- se si considera la matrice jacobiana associata a φ è tale da avere rango 2 $\forall (u,v) \in \text{int}\, D$.

La matrice jacobiana associata a φ è:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

I minori di $\frac{\partial \varphi}{\partial(u,v)}$ sono fondamentali: le terne destrorse che essi definiscono genera il versore normale alla superficie.

Condizione equivalente a quest'ultima è che i determinanti dei minori cioè:

$$A(u,v) = \det \frac{\partial(\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(u,v)} \qquad B(u,v) = \det \frac{\partial(\varphi_3,\varphi_1)}{\partial(u,v)}$$

$$C(u,v) = \det \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}$$

Siano tali che:

$$A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v) > 0 \quad \forall (u,v) \in \operatorname{int} D$$

O ancora, in alternativa, le colonne di $\frac{\partial \varphi}{\partial(u,v)}$ devono essere linearmente indipendenti $\forall (u,v) \in \operatorname{int} D$.

14b Equazioni parametriche e sostegno della superficie: le equazioni parametriche della superficie $\varphi(x,y,z)$ sono:

$$\varphi \begin{cases} x = \varphi_1(u,v) \\ y = \varphi_2(u,v) \quad (u,v) \in D \\ z = \varphi_3(u,v) \end{cases}$$

Il sostegno $\varphi(D) = S$ è il "disegno" della superficie, anche se spesso si usa il termine "superficie" pure per il sostegno.

14c Piano tangente alla superficie: è il piano determinato dai vettori φ_u e φ_v con:

$$\varphi_u(u,v) \cdot (A(u,v), B(u,v), C(u,v)) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right) \cdot (A,B,C) =$$

$$= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\left(\cancel{\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}} - \cancel{\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}}\right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\left(\cancel{\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}} - \cancel{\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}}\right) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\left(\cancel{\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}} - \cancel{\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}}\right)$$

Analogamente $\varphi_v(u,v) \cdot (A,B,C)(u,v) = 0$

Quindi il vettore $(A(u,v), B(u,v), C(u,v))$ è perpendicolare alle superficie piana dei vettori φ_u e φ_v e si dirà vettore normale alla superficie nel punto $P(x,y,z)$ con:

$x = \varphi_1(u,v) \qquad y = \varphi_2(u,v) \qquad z = \varphi_3(u,v)$

Il versore normale è il vettore normale con modulo:

$$n(P) = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right)$$

Possiamo definire il piano tangente alla superficie in un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{cases} x_0 = \varphi_1(u_0,v_0) \\ y_0 = \varphi_2(u_0,v_0) \\ z_0 = \varphi_3(u_0,v_0) \end{cases} \Rightarrow A(u_0,v_0)(x-x_0) + B(u_0,v_0)(y-y_0) + C(u_0,v_0)(z-z_0) = 0$$

14d **Area**: sia D un'unione finita di domini regolari connessi, $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ tali che $D_1, \dots, D_n$ siano privi di punti interni in comune. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 una superficie regolare "a pezzi". Si definisce area di φ:

$$\text{Area}(\varphi) \doteq \iint_D \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, du\, dv = \int_S dS$$

Definizione indipendente dalla parametrizzazione.

15a **Integrale superficiale per superficie regolare e regolare a pezzi**: sia φ una superficie regolare, $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. D è un dominio connesso, $\varphi(D) = S$. Sia inoltre $f: S \to \mathbb{R}$ una funzione scalare, $f \in C^0(S)$. Si definisce $\int_S f\, dS$, integrale superficiale, nel modo seguente:

$$\int_S f\, dS = \iint_D f(\varphi(u,v)) \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv$$

Se invece φ è regolare a pezzi, cioè $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ con D_i, D_j privi di punti interni in comune se $i \neq j$ e $\varphi_i = \varphi_{D_i}$ regolare, allora se $f: S = \varphi(D) \to \mathbb{R}$, f continua $(f \in C^0(S))$:

$$\int_S f\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(\varphi_i(u,v)) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv$$

Indipendentemente dalla parametrizzazione della superficie, ma dipendentemente dal verso del vettore normale alla superficie

15b **Parametrizzazione ammissibile**: una parametrizzazione $\psi: (a,b) \in T \to \mathbb{R}^3$ è ammissibile per S $(\psi(T) = S)$ se $\exists\, r: T \to D$, $r \in C^1$ con in verso di classe C^1 e determinante jacobiano diverso da zero nell'interno di T tale che:

$$T \xrightarrow{\tau} D \xrightarrow{\varphi} S \implies (s,t) \in T \longrightarrow \varphi(\tau(s,t)) = \psi(s,t)$$

In cui $\varphi : (u,v) \in D \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione tale che $\varphi(D) = S$.

15c Cambiamento del segno del versore normale: il versore normale a una superficie S in un punto è:

$$n(P) = \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)|}$$

Calcoliamo:

$$\psi_s = \varphi_u \frac{\partial \tau}{\partial s} + \varphi_v \frac{\partial \tau}{\partial s} \qquad \psi_t = \varphi_u \frac{\partial \tau}{\partial t} + \varphi_v \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

Ricordando che $\varphi(u,v) = \varphi(\tau(s,t)) = \varphi(\tau_1(s,t), \tau_2(s,t)) = \psi(s,t)$:

$$\psi_s = \varphi_u \frac{\partial \tau_1}{\partial s} + \varphi_v \frac{\partial \tau_2}{\partial s} \qquad \psi_t = \varphi_u \frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \varphi_v \frac{\partial \tau_2}{\partial t}$$

Quindi:

$$\psi_s \times \psi_t = (\varphi_u \times \varphi_v) \cdot \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial s} \frac{\partial \tau_2}{\partial t} - \frac{\partial \tau_2}{\partial s} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial t} \right)$$

Tra parentesi abbiamo il determinante della matrice jacobiana di τ rispetto a s e t:

$$\det \frac{\partial \tau}{\partial(s,t)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial s} & \frac{\partial \tau_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial t} & \frac{\partial \tau_2}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Quindi se $\det \frac{\partial \tau}{\partial(s,t)} > 0$ il verso è lo stesso, se è negativo cambia.

15d Orientabilità di una superficie regolare: sia φ una superficie regolare $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con D dominio connesso e $\varphi(D) = S$. Si dice che φ è orientabile se è possibile prolungare il campo dei versori normali da $S_0 = \varphi(\text{int} D)$ a S in modo che:

$$n : P \in S \to n(P) \text{ sia continua}$$

15e Flusso di F attraverso S in direzione di n: sia φ una superficie regolare orientabile, con $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, D dominio connesso e $\varphi(D) = S$. Sia inoltre $F : S \to \mathbb{R}^3$, continua con componenti F_1, F_2 e F_3 un campo vettoriale. Si definisce flusso di F attraverso la superficie S nella direzione di $\underline{n}$ (n versore normale alla superficie):

$$\int_S F\cdot n\, dS = \iint_D \left\{ F_1(\varphi(u,v))\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + F_2(\varphi(u,v))\cdot\frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + F_3(\varphi(u,v))\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\} \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint_D \left[F_1(\varphi(u,v))A + F_2(\varphi(u,v))B + F_3(\varphi(u,v))C \right] du\, dv$$

Dipendendo da $\underline{n}$ l'integrale dipende dalla parametrizzazione della superficie.

15f Superficie con bordo: sia D un dominio connesso. Si definisce superficie con bordo l'applicazione $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi \in C^1(D)$ che sia restrizione di un'applicazione $\varphi: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con A aperto connesso, $A \supset D$ t.c.:

- φ sia invertibile in D;
- la matrice jacobiana abbia caratteristica 2 in D.

Quindi l'immagine della frontiera di D (o di una sua parte) attraverso φ dà il bordo della superficie.

15g Orientamento positivo del bordo: l'orientamento positivo del bordo, indicato con $+\partial S$ ($\partial^+ S$, $+b(S)$, $b^+(S)$), è il verso di percorrenza tale che, considerando la parte di frontiera di D che attraverso φ dà il bordo, essa è una curva piana con verso di percorrenza positivo (antiorario, si lascia il dominio D sulla sinistra).

16a Sistema di equazioni differenziali: si definisce sistema di equazioni differenziale del 1° ordine in forma normale il seguente sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

O, in forma vettoriale:

$$Y'(x) = F(x, Y(x))$$

In cui:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \ I \text{ intervallo}$$

Con $y_i: I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ e $F(x, Y(x)) = (f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \dots, f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)))$

Quindi $F: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Y è soluzione del sistema in I se lo verifica, cioè $Y \in C^1(I)$ e $Y'(x) = F(x, Y(x))$.
Il sistema ha n equazioni in n incognite. Se $n=1$ si ha un'equazione differenziale.

16b Problema di Cauchy associato al sistema differenziale: c'è la condizione iniziale (con $Y(x): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, I intervallo):

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) & x_0 \in I \\ Y(x_0) = Y_0 & Y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si può anche scrivere:

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x) \cdot Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

In cui $A: I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $B: I \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. La soluzione di classe C^1 è del tipo:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

se $A \in C^0(I)$, $B \in C^0(I)$
$\Rightarrow \exists !$ soluzione Y in I di classe $C^1(I)$.

16c Forma scalare: il sistema può essere così riscritto:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x) \cdot y_1(x) + a_{12}(x) \cdot y_2(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x) \cdot y_1(x) + a_{22}(x) \cdot y_2(x) + b_2(x) \\ y_1(x_0) = y_1^0 \qquad y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases}$$

In cui:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$ è la matrice dei coefficienti;
- $B = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix}$ è il termine noto;
- $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ sono i dati iniziali;
- $A, B \in C^0$ in un intorno di x_0

La soluzione è sempre un intervallo. Se $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ il sistema è omogeneo.